Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
Zavod za matematiku

Kolegij: Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Marko Ukrainczyk
3120

Zagreb, svibanj 2003.

Sadržaj

Uvod

Laplaceova transformacija je metoda rješavanja linearnih diferecijalnih jednadžbi. Metoda se sastoji od tri koraka. U prvom koraku diferencijalna jednadžba se transformira u algebarsku jednadžbu. Tako dobivena jednadžba se riješi, a u trećem koraku se rješenje transformira u traženo rješenje originalne diferencijalne jednadžbe.

Velika prednost pri rješavanju Cauchyjeva problema za obične diferencijalne jednadžbe primjenom Laplaceove transformacije sastoji se u tome, da se traženo partikularno rješenje dobiva neposredno i nije neophodno naći opće rješenje, pa na njega primjeniti početne uvijete.

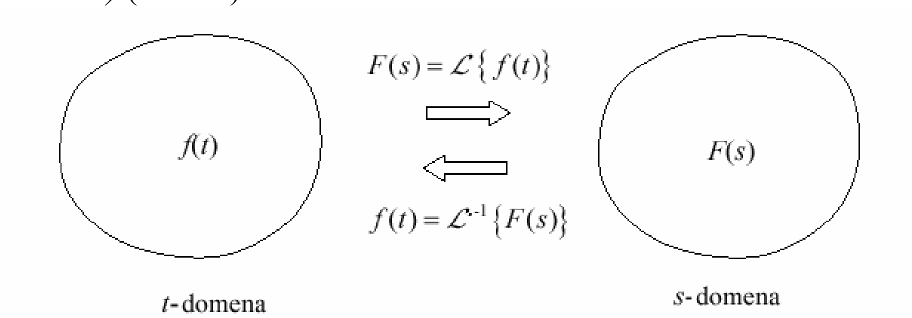
Kao prednosti primjene Laplaceove transformacije pred klasičnim posupcima rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi ističe se: sustavnost, računanje uz pomoć jednostavnih algebarskih postupaka, svođenje potrebnog truda na najmanju mjeru upotrebom tablice transformacijskih parova, automatsko uključivanje početnih uvjeta.

Laplaceova transformacija vrijedi samo za kontinuirane funkcije, točnije za po dijelovima neprekinute fumkcije. Kod diskretnih zapisa imamo z- transformaciju. Njezina važnost se javlja pri analizi diskretnih sustava, koji su uz današnju primjenu računala vrlo česti.

PIERE SIMON DE LAPLACE (1749-1827), veliki francuski matematičar i fizičar, jedan od utemeljitelja metričkog sustava, bavio se teorijom potencijala i matematičkom statistikom. Dokazao stabilnost sunčevog sustava.

Laplaceova transformacija i inverzna Laplaceova transformacija

Laplaceova transformacija je integralna transformacija koja je tijesno povezana s Fourierovom i ima analogna svojstva. Pomoću Laplaceove transformacije veličine koje su funkcije vremena *t* preslikavaju se u nove veličine koje su funkcije kompleksne varijable, $s = \sigma + i\omega$ i na taj se način stvarnoj funkciji *f(t)* pridružuje odgovarajuća funkcija *F(s)* kao njena slika. Zadatak se iz realnog područja (*t-domena*) prenosi u matematički izvedeno Laplaceovo područje (*s-domena)* (slika 1.).



Slika 1. Laplaceova transformacija

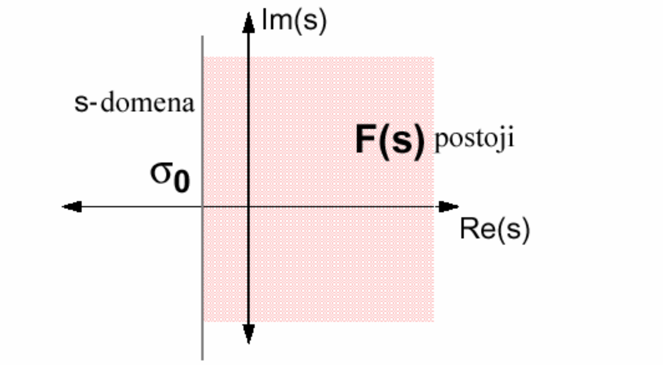
Za funkciju *f(t)* realne varijable *t* kažemo da je *original* (dakle pripada području definicije Laplaceove transformacije), ako je ona definirana za $t \geq 0$, integrabilna na intervalu $(0,\infty)$, i ako je

$$\left|f(t)\right| \leq Ke^{\sigma_0 t}, \qquad \sigma_0 \text{ i K = const.} \tag{1}$$

Ako je *s* kompleksna varijabla, tj. $s = \sigma + i\omega$, onda funkciju

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{2}$$

nazivamo slikom (transformatom) funkcije *f(t)* i pišemo *F(s)=Λ[f(t)].* Integral (2) apsolutno konvergira za $Re\{s\} > \sigma_0$, odnosno $\sigma > \sigma_0$, pri čemu je σ_0 konstanta iz (1). Odavde slijedi da je slika *F(s)* definirana u poluravnini $\sigma > \sigma_0$. Transformat *F(s)* je u toj poluravnini analitička funkcija od s, i ona teži prema nuli za $\sigma \to \infty$ i ostaje omeđena u bilo kojoj poluravnini $\sigma > \sigma_0$. Dalje će se uzimati da je *s* realna varijabla.



Slika 2. s- domena i područje konvergencije

Primjer 1. Nađimo područje konvergencije Laplaceove transformacije ako je:

a) $f(t)=1$ za $t>0$

$$F(s)=\Lambda[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s}$$

Laplaceova transformacija $F(s)$ postoji za sve $s > 0$.

b) $f(t)=e^{-at}$ za $t> 0$ i a je realni broj

$$F(s)=\Lambda[f(t)]=\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt=-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s+a}$$

Laplaceova transformacija $F(s)$ postoji za sve $s > -a$.

Integrali su izračunati za različite realne funkcije, i sastavljene su tablice transformacijskih parova (Prilog 1). Ista tablica služi za preslikavanje iz realnog područja u Laplaceovo područje i obrnuto. Za razliku od $F(s)=\Lambda[f(t)]$, kao izravne transformacije, inverzna se transformacija označavaja s $f(t)=\Lambda^{-1}[F(s)]$:

$$f(t)=\Lambda^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds \tag{3}$$

gdje je c tako izabran da integral (3) konvergira.

Svojstva Laplaceovih transformata

Sljedeći teoremi čine osnovu za široku primjenu Laplaceove transformacije. Nazivi teorema odgovaraju operacijama s funkcijama-orginalima, osim kod teorema početne i konačne vrijednosti.

1. Teorem o linearnosti.

Laplaceova transformacija je linearna operacija, dakle za bilo koje funkcije $f(t)$ i $g(t)$ za koje Laplaceova transformacija postoji i bilo koju konstantu a i b imamo:

$$\Lambda\{af(t)+bg(t)\}=a\,\Lambda(f)+b\Lambda(g)$$

Dokaz. Prema definiciji,

$$\Lambda\{af(t)+bg(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]dt$$

$$=a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=a\Lambda(f)+b\Lambda(g).$$

Primjer 1.

Dokažimo da je $\Lambda[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ i $\Lambda[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

$$\Lambda[e^{i\omega t}]=\frac{1}{s-i\omega}=\frac{s+i\omega}{(s-i\omega)(s+i\omega)}=\frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}+i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

a prema teoremu o linearnosti,

$$\Lambda[e^{i\omega t}]=\Lambda[\cos\omega t+i\sin\omega t]=\Lambda[\cos\omega t]+i\,\Lambda[\sin\omega t].$$

2. Teorem o pomaku.

Ako je $\Lambda[f(t)]=F(s)$ kada je $s>s_0$, tada je

$$\Lambda[e^{s_0 t}f(t)]=F(s-a) \qquad (s>s_0+a);$$

Dakle, množenje s $e^{a\,t}$ u realnom području ekvivalentno je pomaku u Laplaceovom području.

Dokaz. Prema definiciji,

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at}f(t)\right]dt=\Lambda[e^{at}f(t)].$$

Primjer 2.

Dokažimo da je $\Lambda[e^{at}\cos\omega t)]=\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$.

$$\Lambda[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

a prema teoremu o pomaku,

$$\Lambda[e^{at}\cos\omega t]=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

3. Teorem o diferenciranju.

Ako je Laplaceov transformat od *f(t)* jednak *F(s)* i ako se prva derivacija od *f(t)* po vremenu $\dfrac{d}{dt}f(t)$,možemo transformirati, tada je

$$\Lambda\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

Dokaz. Promatramo slučaj kada je $\dfrac{d}{dt}f(t)$ kontinuirana za sve $t\geq 0$. Tada, prema definiciji i pomoću parcijalnog integriranja,

$$\Lambda\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=\int_0^\infty e^{-st}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]dt=\left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=-f(0)+s\,\Lambda[f(t)]$$

Član *f(0)* je granična vrijednost funkcije *f(t)* kad se vrijednosti *t=0* približavamo s desne strane.

Transformacija druge derivacije je:

$$\Lambda\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]=s^2 F(s)-s\,f(0)-f'(0)$$

Transformacija n-te derivacije je:

$$\Lambda\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots\ldots-f^{n-1}(0)$$

Vidimo da se kod diferencijalnih jednadžba početni uvjeti $f(0), f'(0) \cdots f^{n-1}(0)$ uključuju automatski, dok se kod klasičnih metoda rješavanja oni uvode odvojeno u rješenje.

4. Teorem o integriranju.

Ako je Laplaceov transformat od *f(t)* jednak *F(s),* tada je transformat integrala *f(t):*

$$\Lambda\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s) \qquad (s>0,\ s>s_0).$$

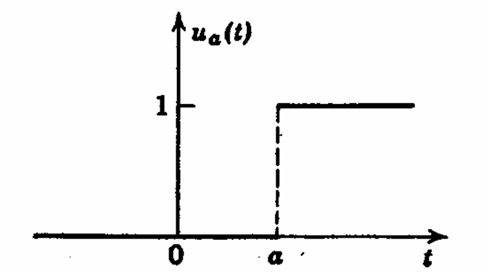
5. Teorem o retardaciji.

Ako je Laplaceov transformat od *f(t)* jhednak *F(s),* tada za vremenski pomak funkcije *f(t)* za vrijdnost *a* (pozitivan realni broj) daje transformat:

$$\Lambda[f(t-a)u_a(t)]=e^{-as}F(s)$$

gdje je $u_a(t)$ Heavisideova funkcija (jedinična skokomična funkcija):

$$u_a(t)=\begin{cases}0 & za\ t<a\\ 1 & za\ t>a\end{cases} \qquad (a\geq 0)$$



Slika 3. Heavisideova funkcija

Dokaz.

$$F(s)=\Lambda[f(\tau)]=\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-as}F(s)=\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)d\tau$$

supstitucija: $\tau+a=t$

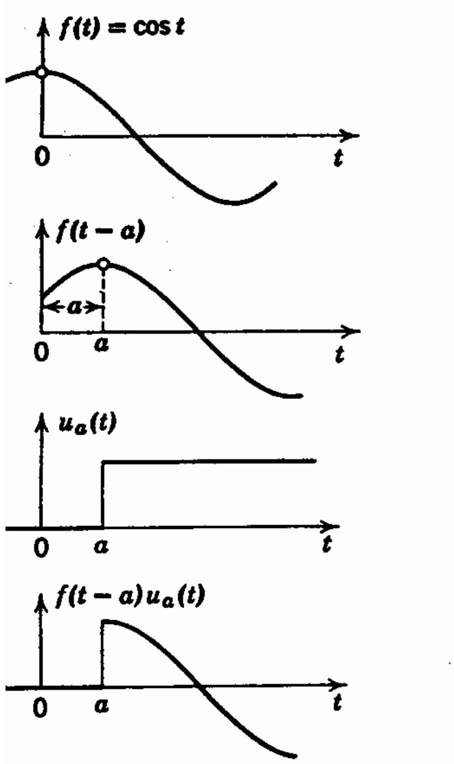
$$e^{-as}F(s)=\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$$

Želimo da granice integracije budu od 0 *do* ∞. Radi toga funkciju *f(t-a)* zamjenimo s funkcijom koja je jednaka nuli na intervalu $0\leq t<a$ i jednaka je *f(t-a) za t>a*:

$$f(t-a)u_a(t)=\begin{cases}0 & za\ \ t<a\\ f(t-a) & za\ \ t>a\end{cases}$$

$$e^{-as}F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u_a(t)dt=\Lambda[f(t-a)u_a(t)].$$

Primjer 3.



Slika 4. Ilustracijski primjer $f(t-a)u_a(t)$ gdje je $f(t)=cost$

6. Teorem početne vrijednosti.

Ako se *f(t)* i $\frac{d}{dt}f(t)$ mogu transformirati i ako je transformat od *f(t)* jednak *F(s),* a *lim f(t)* postoji kad *t→∞,* tada je:

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

6. Teorem konačne vrijednosti.

Ako se *f(t)* i $\frac{d}{dt}f(t)$ mogu transformirati i ako je transformat od *f(t)* jednak *F(s),* a postoji *lim sF(s), tada je :*

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0} f(t)$$

Pomoću teorema početne vrijednosti i konačne vrijednosti možemo naći vrijednosti funkcije u realnom području *f(t)* kod dva ekstrema, *t=0* i *t=∞* , i to bez korištenja inverzne transformacije.

Parcijalni razlomci

Za primjene je osobito važna inverzna transformacija razlomljene racionalne funkcije s obzirom na *s*. Takve funkcije rastavljamo na parcijalne razlomke i onda se prema teoremu o linearnosti možemo ograničiti na inverzne transformacije parcijalnih razlomaka. Rješenje je tada zbroj svih pojedinih razlomaka preslikanih u realno područje.

Općenito se transformat *F(s)* može prikazati kao omjer dvaju polinoma *G(s)* i *H(s)*, koji su redova *m* i *n*, i koji se mogu prikazati padajućim redom potencija varijable s:

$$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

a_m i b_n su realne konstante, a koeficijent najviše potencije od *s* u nazivniku može se izjednačiti s jedinicom. Uz to pretpstavljamo da je *n>m* i da je stoga *F(s)* pravi razlomak.

Jedan od načina da se nađu parcijalni razlomci funkcije *F(*s) je pomoću algebarske metode tzv. Heavisideovog razvoja. Kao konačni oblik dobijemo:

$$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{\alpha_1}{s+\beta_1} + \frac{\alpha_2}{s+\beta_2} + \frac{\alpha_3}{s+\beta_3} + \cdots + \frac{\alpha_i}{s+\beta_i} \cdots + \frac{\alpha_n}{s+\beta_n}$$

gdje je *H(s)* reda *n*, a β_i su suprotne vrijednosti korijena jednadžbe *H(s)=0*. Koeficijenti α_i se dobiju pomoću slijedećeg generaliziranog izraza:

$$\alpha_i = \lim_{s\to -\beta_i}\left((s+\beta_i)\frac{G(s)}{H(s)}\right)$$

no, imamo li poseban slučaj da se korijeni β jednadžbe *H(s)=0* ponavljaju:

$$F(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{\alpha_m}{\left(s+\beta\right)^m}+\frac{\alpha_{m-1}}{\left(s+\beta\right)^{m-1}}+\cdots+\frac{\alpha_1}{s+\beta}\cdots+\frac{\alpha_i}{\left(s+\beta_i\right)}$$

korijeni α_i se dobiju na sljedeći način:

$$\frac{\left(s+\beta\right)^m G(s)}{H(s)}=\alpha_m+\alpha_{m-1}\left(s+\beta\right)+\cdots+\alpha_1(s+\beta)^{k-1}$$

$$\alpha_m=\lim_{s\to-\beta}\left(\frac{(s+\beta)^m G(s)}{H(s)}\right)$$

$$\alpha_k=\lim_{s\to-\beta}\left(\frac{1}{(m-k)!}\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}\frac{(s+\beta)^m G(s)}{H(s)}\right)\quad \mathit{(k=1,2,\cdots,m\text{-}1)}$$

Koeficijente α_i možemo dobiti i metodom neodređenih koeficijenata.
Dobivene parcijalne razlomke možemo primjenom tablice sada lako prevesti u realno područje:

$$f(t)=\Lambda^{-1}[F(s)]=\Lambda^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{\left(s+\beta_1\right)}\right]+\Lambda^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{\left(s+\beta_2\right)}\right]+\Lambda^{-1}\left[\frac{\alpha_3}{\left(s+\beta_3\right)}\right]+\ldots+\Lambda^{-1}\left[\frac{\alpha_i}{\left(s+\beta_i\right)}\right]+$$

$$\ldots+\Lambda^{-1}\left[\frac{\alpha_n}{\left(s+\beta_n\right)}\right]$$

Primjer 1 Pronađi inverznu transformaciju od:

$$Y(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}$$

Prikažimo Y(s) u obliku parcijalnih razlomaka:

$$Y(s)=\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s-2}+\frac{A_3}{s+3}$$

Nađimo koeficijente:

$$A=\left.\frac{\cancel{s}(s+1)}{\cancel{s}(s-2)(s+3)}\right|_{s=0}=-\frac{1}{6}\qquad B=\left.\frac{s+1}{s(s+3)}\right|_{s=2}=-\frac{3}{10}\qquad C=\left.\frac{s+1}{s(s-2)}\right|_{s=-3}=-\frac{2}{15}$$

Imamo:

$$Y(s)=-\frac{1}{6s}+\frac{3}{10(s-2)}-\frac{2}{15(s+3)}$$

Inverzna transformacija:

$$\Lambda^{-1}[\mathrm{Y}(s)]=-\frac{1}{6}+\frac{3}{10}e^{2t}-\frac{2}{10}e^{-3t}$$

Primjena Laplaceovih transformacija

Primjer 1. Diferencijalna jednadžba koja opisuje linearni proces prvog reda ima oblik:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y = kx(t)$$

Radi ispitivanja dinamičkog vladanja procesa uvodi se jedinična skokomična pobuda (*x(t)* je Heavisideova funkcija). Nađimo prijelaznu pojavu tog procesa (*y(t)*) uz nulte početne uvjete *y(0)=x(0)=0*.

Prevođenje u Laplaceovo područje:

$$\tau\left[sY(s) - y(0)\right] + y(s) = kX(s)$$
$$Y(s)\left[\tau s + 1\right] = kX(s)$$
$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} X(s)$$

u Laplaceovom području $X(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1}\frac{1}{s} = \frac{k}{\tau(s + \frac{1}{\tau})s} = \frac{\frac{k}{\tau}}{(s + \frac{1}{\tau})s}$$

$$K = \frac{k}{\tau}$$

$$Y(s) = \frac{K}{(s + \frac{1}{\tau})s} = \frac{A}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{B}{s}$$

$$K = As + B(s + \frac{1}{\tau})$$

$$s = -\frac{1}{\tau}: \quad K = A(-\frac{1}{\tau}) + B\left[(-\frac{1}{\tau}) + \frac{1}{\tau}\right] = A(-\frac{1}{\tau}) \rightarrow \quad A = -k$$

$$s = 0: \quad K = A \cdot 0 + B(0 + \frac{1}{\tau}) = B\frac{1}{\tau} \quad \rightarrow \quad B = k$$

$$Y(s) = -k\left(\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right) + k\left(\frac{1}{s}\right)$$

Nakon rješenja jednadžbe u Laplaceovom području vraćamo se u realno područje:

$$y(t) = \Lambda^{-1}[\mathrm{Y}(s)] = -k \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} + k \cdot 1$$

$$y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Primjer 1. Nađimo partikularno rješenje linearne diferencijalne jednadžbe:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t + e^{3t}, \qquad y(0)=1, \qquad y'(0)=-1.$$

Prevođenje te jednadžbe u Laplaceovo područje:

$$s^2Y(s) - s + 1 - 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s-3}$$

Riješimo to po *Y(s)* i prikažimo *Y(s)* u obliku parcijalnih razlomaka:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{s^4 - 7s^3 + 13s^2 + 4s - 12}{s^2(s-3)(s^2-3s+2)} \\ &= \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-1} \end{aligned}$$

Nađemo koeficijente:

$$A_2 = \left.\frac{G(s)}{(s-3)(s^2-3s+2)}\right|_{s=0} = \frac{12}{6} = 2$$

$$A_1 = \left.\frac{d}{ds}\frac{G(s)}{H(s)}\right|_{s=0} = \left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s^4 - 7s^3 + 13s^2 + 4s - 12}{(s-3)(s^2-3s+2)}\right]\right|_{s=0} = -2$$

$$B = \left.\frac{G(s)}{s^2(s^2-3s+2)}\right|_{s=3} = \frac{1}{2}$$

$$C = \left.\frac{G(s)}{s^2(s-3)(s-2)}\right|_{s=2} = -2$$

$$D = \left.\frac{G(s)}{s^2(s-3)(s-2)}\right|_{s=1} = -\frac{1}{2}$$

Imamo:

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{2(s-3)} - \frac{2}{s-2} - \frac{1}{2(s-1)}$$

Nakon rješenja jednadžbe u Laplaceovom području vraćamo se u realno područje:

$$y(t) = \Lambda^{-1}[Y(s)] = \Lambda^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{2(s-3)} - \frac{2}{s-2} - \frac{1}{2(s-1)}\right]$$

$$y(t) = 2t - 2 + \frac{1}{2}e^{3t} - 2e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}$$

Osvrt na z-transformaciju

U diskretnim sustavim, umijesto funkcija, javljaju se nizovi. Danas, uz sve veću primjenu računala na važnosti dobivaju vremenski diskretni zapisi. Matematičke tehnike za analizu takvih diskretnih sustava su jednadžbe diferencija i z-transformacija.

Pretpostavimo da uzorkujemo kontinuiranu varijablu koja je funkcija vremena *f(t)*. Budući da uzorkovane vrijadnosti kontinuirane funkcije *f(t)* postoje samo u trenutku uzorkovanja, niz brojeva koji odgovaraju vrijednosti funkcije u vremenu uzorkovanja možemo zapisati kao:

$$f(mT_s) = \begin{cases} f(t) & za \quad m=0,1,2,.... \\ 0 & inače \end{cases}$$

gdje je T_s interval uzorkovanja.

Vremenski diskretni zapis kontinuirane funkcije *f(t)* označiti ćemo s $f^*(t)$. Budući da je vremenski diskretni zapis $f^*(t)$ podskup od kontinuirane funkcije *f(t)*, možemo primjeniti Laplaceovu transformaciju na $f^*(t)$:

$$F^*(s) = \int_0^\infty f^*(t) e^{-st} dt$$

Budući $f^*(t)$ postoji samo u trenutku uzorkovanja integral možemo zamijeniti sa sumom:

$$F^*(s) = \int_0^\infty f^*(t) e^{-st} dt = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) e^{-smT_s}$$

Uvodeći supstituciju $z = e^{sT_s}$ imamo:

$$F^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) e^{-smT_s} = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) z^{-m} = F(z)$$

Dakle, z- transformacija kontinuirane funkcije *f(t)* uzorkovane s intervalom uzorkovanja T_s je definirana sljedećim izrazom:

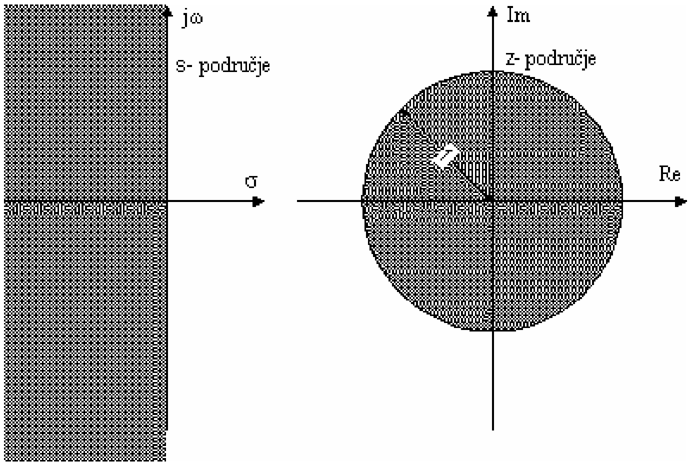
$$Z\left[f^*(t) \right] = F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) z^{-m}$$

Kako je z-transformacija zapravo samo Laplaceova transformacija vremenskog diskretnog zapisa, kao takva nasljeđuje mnoga svojstva Laplaceove transformacije koja su navedena gore. Tablica z- transformacija se nalazi u prilogu (Prilog 2.).

Preslikavanje *s*-područja u *z*-područje ostvareno je slijedećim izrazom:

$$z = e^{sT_s}$$

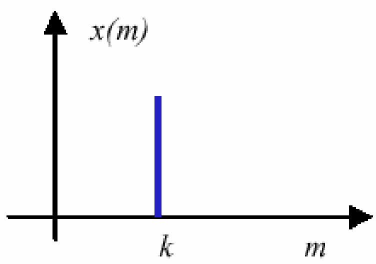
koji mapira cijelu lijevu stranu *s*- područja u ravninu omeđenu jediničnom kružnicom, tzv. *z*-područje (Slika 5.).



Slika 5. s- područje i z- područje

Kako je *z*- transformacija beskonačni red potencija, ona postoji samo za one vrijednosti varijable *z* za koje red konvergira konačnoj sumi. Područje konvergencije z-transformacije je skup svih vrijednosti *z* za koje *F(z)* postiže konačne vrijednost.

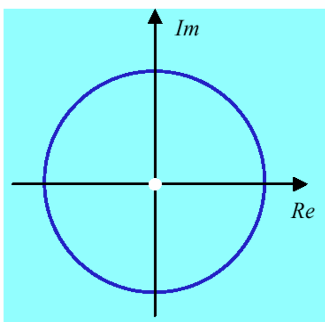
Primjer 1. Odredimo z- transformaciju i njezino područje konvergencije sljedećeg signala ($F_s=1$):



$$x(m)=\delta(m-k)=\begin{cases}1 & m=k\\ 0 & m\neq k\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(m-k)z^{-m}=1\cdot z^{-k}=\frac{1}{z^{k}}$$

X(z) postoji za sve vrijednosti *z* osim *z=0*. Područje konvergencije je cijelo z-područje osim z=0 (Slika 6.).



Slika 6. Područje konvergencije z-transformacije *primjera 1.*

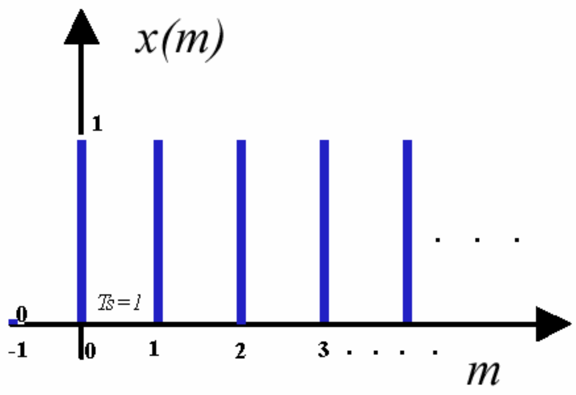
Primjer 2. Odredimo z-transformaciju niza:

$$\{f(m)\} = \{1, 3, 2, 0, 4, 0, 0, 0\}$$

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m}$$

$$F(z) = 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-4}$$

Primjer 3. Odredimo z-transformaciju Heavisideove funkcije uzorkovane pri $T_s=1$:



$$\{x(m)\}\Big|_{m=0}^{\infty} = \{1, 1, 1, 1, 1, ...\}$$

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots + z^{-m} + \cdots$$

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m}$$

kako je:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a} \quad , \quad |a| < 1$$

imnamo:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} .$$

Primjer 4. Diskretni sustav je određen slijedećom jednadžbom diferencija:

$$x(m+2) - \frac{3}{2} \cdot x(m+1) + \frac{1}{2} \cdot x(m) = u(m)$$

s početnim uvjetima *x(0)=0,* $x(1)=\frac{5}{2}$.Nađimo odziv sustava na Heavisideovu funkciju,*u(m)* kao pobudu.

Prijelaz u z-područje:

$$\left[z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)\right]-\frac{3}{2}\cdot\left[zX(z)-zx(0)\right]+\frac{1}{2}\cdot X(z)=\frac{z}{z-1}$$

Riješimo po X(z):

$$\left[z^2-\frac{3}{2}\cdot z+\frac{1}{2}\right]X(z)=\frac{z}{z-1}+z^2+(\frac{5}{2}-\frac{3}{2})z$$

$$X(z)=\frac{z\left[1+(z+1)(z-1)\right]}{(z-1)(z-1)-(z-\frac{1}{2})}=\frac{z^3}{(z-1)^2(z-\frac{1}{2})}$$

Nađimo parcijalne razlomke od $\frac{X(z)}{z}$:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^2}{(z-1)^2(z-\frac{1}{2})}=\frac{A}{(z-1)^2}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z-\frac{1}{2}}$$

$$A=\left.\frac{z^2}{z-\frac{1}{2}}\right|_{z=1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

$$C=\left.\frac{z^2}{(z-1)^2}\right|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=1$$

$$z^2=A(z-\frac{1}{2})+B(z-\frac{1}{2})(z-1)+C(z-1)^2$$

$$z^2:\ 1=B+C=B+1\rightarrow\quad \text{B=0}$$

$$X(z)=\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

Inverzna z-transformacija (tablica z-transformacija):

$$x(m)=2m+\left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

7. Literatura

1. Ervin Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics second edition, John Wiley & Sons, Inc. New York-London-Sydney 1967
2. I. N. Bronštejn i K.A. Semendjajev: Matematički priručnik za inženjere i studente, Tehnička knjiga, Zagreb 1991.
3. http://lorien.ncl.ac.uk/ming/digicont/digimath/sampled3.htm
(Chemical and Process Engineering, University of Newcastle Upon Tyne)

Prilog 1.: Tablica Laplaceovih transformacija

	$f(t)$	$F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	c	$\frac{c}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
6.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
9.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
10.	$\frac{t}{2a}\cdot\sin at$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$t\cdot\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
12.	$e^{-at}\cdot\sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
13.	$e^{-at}\cdot\cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
14.	$e^{-at}\cdot f(t)$	$F(s+a)$
15.	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
16.	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

Prilog 2.: Tablica z- transformacija

$f(n)$	$F(z)$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
$\frac{a^n}{n!}$	$e^{a/z}$
$a^n \sin \beta n$	$\frac{az \sin \beta}{z^2 - 2az \cos \beta + a^2}$
$a^n \cos \beta n$	$\frac{z(z - a \cos \beta)}{z^2 - 2az \cos \beta + a^2}$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} a^n$	$\frac{az^2}{(z-a)^3}$
$\frac{n!}{2!(n-2)!} a^n$	$\frac{a^2 z}{(z-a)^3}$
$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} a^n$	$\frac{az^k}{(z-a)^{k+1}}$
$\frac{n!}{k!(n-k)!} a^n$	$\frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}$
$n^2 a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
$\sum_{k=0}^{n} f(k)$	$\frac{z}{z-1} F(z)$
$f(n-k)$	$\frac{F(z)}{z^k}$
$f(n+k)$	$z^k F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} f(i) z^{k-i}$
$nf(n)$	$-zF'(z)$
$a^{-n} f(n)$	$F(az)$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k) g(n-k)$	$F(z) \cdot G(z)$